宿州市2017～2018学年高三第三次教学质量检测参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	A	D	C	B	B	B	D	A	A

二、填空题:

13. $\dfrac{\pi}{4}$　14. $[0,2]$　　15. $y^2=\dfrac{8}{3}x$　16. $(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

三、解答题：

17. 【解析】:（Ⅰ）当$n=1$时，由$2S_1=3-a_1$得：$a_1=1$．…………………………2 分

当$n\ge 2$ 时，$2S_n=3-a_n$　①；

$2S_{n-1}=3-a_{n-1}$　②　上面两式相减，得：$a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}$．　……………………………4 分

所以数列$\{a_n\}$是以首项为1，公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列．　得：$a_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$ $(n\in N^*)$．……6 分

（Ⅱ）$b_n=\log_{\frac{1}{3}}a_{n+1}=\log_{\frac{1}{3}}(\dfrac{1}{3})^n=n$　　……………………………7 分

$$c_n=\frac{1}{\sqrt{b_nb_{n+1}}(\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n+1}})}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

…………………………………………………………………………………10 分

$$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$　　……………………………………………………………12 分

18. 【解析】（Ⅰ）设图中从左到右前 4 个组的频率分别为x，$3x$，$6x$，$12x$,依题意，得

$x+3x+6x+12x+(0.028+0.020+0.008)\times 10=1$，$\therefore x=0.02$　　…………2 分

设调查中随机抽取了n个学生的数学测试成绩，则$3\times 0.02=\dfrac{12}{n}$　　$\therefore n=200$

∴调查中随机抽取了 200 个学生的数学测试成绩.　　………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）前 4 组的频率分别为0.02，0.06，0.12，0.24

…………………………………………5 分

∵前 4 组的频率之和为 0.44＜0.5，前 5 组的频率之和为 0.72＞0.5,

∴中位数所在区间为$[120,130)$，　　……………………………6 分

设抽调的 n 个学生的数学测试成绩的中位数为 x，

则 $0.44+(x-120)\times 0.028=0.5$

$\therefore x=122.14$ ··8 分

(III)按照分层抽样，抽取的 50 人中，从分数在 $[140,150]$ 中抽取的人数为：

$50\times 0.008\times 10=4$ 人··9 分

记抽取的 4 人分别为：甲，a,b,c，

从甲，a,b,c 中抽取 2 人的所有抽法有：

（甲，a），（甲，b），（甲，c），（a，b），（a，c），（b，c），

···10 分

共有抽取方法种数：n=6

包含甲的抽取方法种数：m=3 ···11 分

$\therefore$ 由古典概型得学生甲被选中的概率为：$p=\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ ··················12 分

19. 【解析】(Ⅰ) 【方法一】连结 CM，设 $CM\bigcap DE=O$，连结 OF ···············1 分

$\because$ BM=DM,BE=CE

$\therefore \dfrac{CO}{OM}=\dfrac{2}{1}$

$\because CF=\dfrac{1}{4}CA$, $CN=\dfrac{3}{8}CA$ $\therefore \dfrac{CF}{FN}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{CO}{OM}$ ··2 分

$\therefore OF$ //MN ···3 分

MN //平面 FED ···4 分

【方法二】取 BE 的中点 Q，连结 DQ 、NQ，

则 $MQ \underset{=}{//} \dfrac{1}{2}DE$， ···························1 分

$\because F$ 、N 在棱 AC 上，且 $CF=\dfrac{1}{4}CA$ 、$CN=\dfrac{3}{8}CA$，

$\therefore \dfrac{CF}{CN}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{CE}{CQ}$ ···························2 分

又 $NQ\bigcap QM=Q$, $EF\bigcap ED=E$

$\therefore$ 平面 NDQ // 平面 FED ···3 分

MN //平面 FED ··4 分

（Ⅱ）$\because \Delta BCD$ 为等边三角形，且 BE=CE

∴DE⊥BC，　　　　　……………………………………………………………………5 分

∵AB⊥平面 BCD，∴AB⊥DE

又 $AB\bigcap BC=B$

∴DE⊥平面 ABC

∴DE⊥AC　……………………………………………………………6 分

取 AC 的中点 P,连结 PB,则 $\dfrac{CF}{CP}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$, $EF\,//\,PB$

∵AB=BC，AP=PC,∴BP⊥AC，

∴EF⊥AC　　　　　……………………………………………………………………7 分

又 EF∩DE=E，

∴AC⊥平面 DEF；　……………………………………………………………………8 分

(III) ∵ ΔBCD 为等边三角形， $BC=2$，且 BE=CE，∴DE=$\sqrt{3}$

由（Ⅱ）$EF\perp AC$，在 ΔCEF 中，$CE=\dfrac{1}{2}BC=1$，

∵AB⊥平面 BCD, ∴AB⊥BC, 又 $AB=BC=2$，∴ $\angle ACB=45^{\circ}$

$\therefore EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,　　……………………………………………………9 分

由（Ⅱ）DE⊥平面 ABC，∴DE⊥EF，

$S_{\Delta DEF}=\dfrac{1}{2}DE\times EF=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　……………………………………10 分

$\because CF=\dfrac{1}{4}CA$，$AB\perp$ 平面 BCD

$\therefore V_{F-DBE}=\dfrac{1}{4}V_{A-DBE}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}S_{\Delta DBE}\times AB=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3})\times 2=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

……………………………………………………………………11 分

∴设点 B 到平面 DEF 的距离为 d，则由 $V_{F-DBE}=V_{B-DEF}$ 得

$\dfrac{1}{3}S_{\Delta DEF}\times d=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\ \therefore d=\dfrac{\sqrt{3}}{4S_{\Delta DEF}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\times\frac{\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　…………………………12 分

20. 【解析】(Ⅰ) 设 $Q(x,y)$，$P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}x=x_0\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0\end{cases}$，∴ $\begin{cases}x_0=x\\ y_0=\sqrt{3}y\end{cases}$ …………2 分

代入圆的方程得 ${x_0}^2+{y_0}^2=x^2+3y^2=3$ ………………………………4 分

$\therefore$ 曲线 C 的方程：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ ……………………………5 分

（II）设直线 l 的方程为 $y=k(x-\sqrt{2})$ 代入 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$

整理得 $(1+3k^2)x^2-6\sqrt{2}k^2x+6\sqrt{2}k^2-3=0$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),AB$ 的中点 $P(x_0,y_0)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{6\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{6\sqrt{2}k^2-3}{1+3k^2}$ ……………………6 分

$\therefore x_0=\dfrac{3\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}$，代入 l 得：$y_0=\dfrac{-\sqrt{2}k}{1+3k^2}$ ……………………………7 分

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{|x_1+x_2|^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\bullet\frac{2\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{1+3k^2}=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{1+3k^2}$$

……………………8 分

AB 的垂直平分线方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{3\sqrt{2}k^2}{1+3k^2})+\dfrac{-\sqrt{2}k}{1+3k^2}$ ………………9 分

令 $y=0$ 得 $x_D=\dfrac{2\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}$ ……………………………10 分

$\therefore |ND|=|\dfrac{2\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}-\sqrt{2}|=|\dfrac{-\sqrt{2}(1+k^2)}{1+3k^2}|=\dfrac{\sqrt{2}(1+k^2)}{1+3k^2}$ ……………………11 分

$\therefore \dfrac{|AB|}{|ND|}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{1+3k^2}}{\dfrac{\sqrt{2}(1+k^2)}{1+3k^2}}=\sqrt{6}$，为定值. ……………………12 分

21. 【解析】（Ⅰ）$f'(x)=a+\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{ax^2-2x+a}{x^2},(x>0)$， ……………………1 分

令 $h(x)=ax^2-2x+a$　$\Delta=4-4\times a\times a=4(1-a^2)$

（1）当 $a=0$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 R 上为减函数……………………2 分

（2）当 $a<0$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 R 上为减函数

………………………………………3 分

（3）当 $0<a<1$ 时，$\Delta>0$，$h(x)=ax^2-2x+a=0$ 的根为 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$，

$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$，且 $0<\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$，

$\therefore$ 当 $0<x<\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ 或 $x>\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 为增函数函数，

当 $\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

…………………………………………4 分

（4）当 $a\geqslant 1$ 时，$\Delta\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 R 上为增函数

…………………………………………5 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上为减函数

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a})$ 或 $(\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty)$ 上为增函数

在 $(\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})$ 上为减函数

当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 R 上为增函数 ………………………………………6 分

（Ⅱ）$g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}\geqslant 0$ 在 $[1,e]$ 上恒成立，$\therefore g(x)$ 在 $[1,e]$ 上为增函数

$\therefore g(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最小值为 $g(x)_{\min}=g(1)=e$ ………………………………7 分

存在 $x_1,x_2\in[1,e]$ 使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow$ 在 $[1,e]$ 上 $f(x)_{\max}>g(x)_{\min}$

$\Leftrightarrow$ 在 $[1,e]$ 上 $f(x)_{\max}>e$ ………………………………………8 分

由（Ⅰ）（1）当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上为减函数，

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=0<e$，不合题意。………………………………………9 分

（2）当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a})$ 或 $(\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty)$ 上为增函数

在 $(\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})$ 上为减函数

$\because 0<\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<1$，$\therefore$ 在 $(1,\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})$ 上为减函数，$(\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty)$ 上为增函数。

$\therefore f(x)_{\max}$ 为 $f(1)$ 与 $f(e)$ 的最大值，

$\because f(1)=0<e$，$\therefore f(x)_{\max}>e\Leftrightarrow f(e)>e$

$f(e)=ae-\frac{a}{e}-2>e\Rightarrow a>\frac{e(e+2)}{e^2-1}=\frac{e^2+2e}{e^2-1}>1$ 不合题意。

……………………………………………10 分

（3）当 $a\geqslant 1$ 时， $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上为增函数

$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=ae-\frac{a}{e}-2>e\Rightarrow a>\frac{e(e+2)}{e^2-1}=\frac{e^2+2e}{e^2-1}>1$

$\therefore a>\frac{e^2+2e}{e^2-1}$ 符合题意。 ……………………………………………11 分

综上所述，a 的取值范围为 $(\frac{e^2+2e}{e^2-1},+\infty)$ ……………………………………………12 分

22. 【解析】（Ⅰ）曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………3 分

曲线 $C_2:2\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=1\Rightarrow\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$

即：C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-1=0$ ……………………………………5 分

（Ⅱ）曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）……………………………………6 分

把 C_2 的参数方程代入 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $7t^2+4\sqrt{3}t-12=0$，$\therefore\begin{cases}t_1+t_2=-\frac{4\sqrt{3}}{7}\\ t_1\cdot t_2=-\frac{12}{7}\end{cases}$

……………………………………………………………………7 分

$\therefore\left||PA|^2-|PB|^2\right|=\left|{t_1}^2-{t_2}^2\right|=|t_1+t_2|\cdot|t_1-t_2|=|t_1+t_2|\cdot\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{96\sqrt{2}}{49}$.

……………………………………………………10 分

23.【解析】（Ⅰ）当 $a=1$ 时， $f(x)=|x-1|+2x$，不等式 $|x-1|+2x\geqslant 3x+2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1\\ (x-1)+2x\geqslant 3x+2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1\\ -(x-1)+2x\geqslant 3x+2\end{cases}$，……………………………………2 分

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1\\ -1\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1\\ 2x\leqslant -1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\phi$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ ……………………………………4 分

不等式的解集为$\left\{x \middle| x \leqslant -\frac{1}{2}\right\}$；　　　　　　　　　　　　　……………………………………………5 分

（Ⅱ）$f\left(x\right)=\left|x-a\right|+2x=\begin{cases}3x-a & x\geqslant a\\ x+a & x<a\end{cases}$，$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right]$上为增函数，

……………………………………………6 分

$\therefore f\left(x\right)_{\max}=f(1)=\left|a-1\right|+2$　　　　　　　　　　……………………………………………7 分

$\therefore$存在$x\in\left(-\infty,1\right]$，使不等式$a^2+1<f\left(x\right)$成立

$\Leftrightarrow a^2+1<\left|a-1\right|+2 \Leftrightarrow a^2-1<\left|a-1\right| \Leftrightarrow (a+1)(a-1)<\left|a-1\right|$……………………………9 分

$\Leftrightarrow \begin{cases}a>1\\ a+1<1\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\ 0<0\end{cases}$或$\begin{cases}a<1\\ a+1>-1\end{cases}$

$\Rightarrow -2<a<1$　　　　　　　　　　　　　　……………………………………………10 分