宿州市2017届学年高三第三次教学质量检测
试卷（理科数学）参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	A	D	D	B	C	C	C	D	B

二、填空题:

13. $\dfrac{\pi}{3}$　　14. -132　　15. 1或3　　16. $(\dfrac{\sqrt{6}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

三、解答题：

17. 解：（1）由$T_n=2S_n-n^2$得：$a_1=2a_1-1$，解得$a_1=S_1=1$，由$S_1+S_2=2S_2-4$，

解得$a_2=4$. 当$n\geq 2$时，$S_n=T_n-T_{n-1}=2S_n-n^2-2S_{n-1}+(n-1)^2$，即

$S_n=2S_{n-1}+2n-1$，　　①　　……………………………………2 分

$S_{n+1}=2S_n+2n+1$　　②

由②−①得$a_{n+1}=2a_n+2$　　……………………………………4 分

$\therefore a_{n+1}+2=2(a_n+2)$，又$a_2+2=2(a_1+2)$，所以数列$\{a_n+2\}$是以$a_1+2=3$为首项，2 为公比的等比数列，$\therefore a_n+2=3\cdot 2^{n-1}$，即$a_n=3\cdot 2^{n-1}-2$.　……6 分

（II）$\because b_n=3n\cdot 2^{n-1}-2n$，所以$K_n=3\left(1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+n\cdot 2^{n-1}\right)-2(1+2+\cdots+n)$

$=3\left(1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+n\cdot 2^{n-1}\right)-n^2-n$，

记$R_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$③，$2R_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$④，

由③−④得$-R_n=1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=(1-n)\cdot 2^n$

-1，所以$R_n=(n-1)\cdot 2^n+1$.

所以$K_n=3(n-1)2^n-n^2-n+3$.…………12 分

18. 解：（Ⅰ）连接DB,DA_1，因为侧面ABB_1A_1为菱形，所以$AB=AA_1$，又$\angle DAB=\angle DAA_1$，所以$\Delta DAB\cong\Delta DAA_1$，$\therefore DB=DA_1$。

取A_1B的中点O，连DO，则$DO\perp A_1B$，又$AO\perp A_1B$，$DO\cap AO=O$，$DO\subseteq$平面AOD，$AO\subseteq$平面AOD，$\therefore A_1B\perp$平面AOD，从而$A_1B\perp AD$.　………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$A_1B\perp$平面AOD，又$A_1B\subseteq$平面A_1ABB_1，

平面$A_1ABB_1\perp$平面AOD，所以直线AD在平面ABB_1A_1上的投影为直线AO，故$\angle DAO=30^\circ$，设$AD=AB=2BC$

$=2$，则 $AO=\sqrt{3}$，$\therefore DO^2=4+3-2\times 2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$.

$\therefore DO^2+AO^2=AD^2$，$\therefore DO\perp AO$，$\therefore DO\perp$ 平面A_1ABB_1.

故可以射线OB、射线OB_1、射线OD为x轴、y轴、z轴的正方向建立空间直角坐标系$O-xyz$，如图所示，则 $A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$B_1(0,\sqrt{3},0)$，$D(0,0,1)$. 所以

$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1}=(-1,\sqrt{3},0)$，由 $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ 可得 $C(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$，

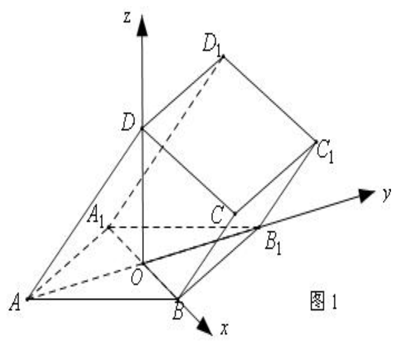

图 1

所以 $\overrightarrow{DC}=(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2})$ ....7 分

设平面 DCC_1D_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{1}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$，

则 $y=1,z=3\sqrt{3}$，所以 $\vec{m}=(\sqrt{3},1,3\sqrt{3})$. ....9 分

取平面 ABB_1A_1 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，设平面 DCC_1D_1 与平面 ABB_1A_1 所成角为θ，

所以 $\cos\theta=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}=\dfrac{3\sqrt{93}}{31}$.

故平面 DCC_1D_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{3}{31}\sqrt{93}$. ....12 分

19. 解：（I）由表格数据可得 2×2 列联表如下：

	非移动支付活跃用户	移动支付活跃用户	合计
男	25	20	45
女	15	40	55
合计	40	60	100

将列联表中的数据代入公式计算得

$$K^2=\frac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}=\frac{100\left(25\times 40-15\times 20\right)^2}{40\times 60\times 55\times 45}=\frac{2450}{297}\approx 8.249.$$

所以在犯错误概率不超过0.005的前提下，能认为是否为“移动支付活跃用户”与性别有关.

……………………………………4 分

（II）视频率为概率，在我市“移动支付达人”中，随机抽取 1 名用户，该用户为男“移动支付达人”的概率为$\dfrac{1}{3}$，女“移动支付达人”的概率为$\dfrac{2}{3}$.

①抽取的 4 名用户中，既有男“移动支付达人”，又有女“移动支付达人”的概率为

$P=1-(\dfrac{1}{3})^4-(\dfrac{2}{3})^4=\dfrac{64}{81}$. ……………………………………6 分

②记抽出的男“移动支付达人”人数为 Y，则 $X=300Y$.

由题意得 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，$P(Y=0)=C_4^0(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$；

$P(Y=1)=C_4^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$；$P(Y=2)=C_4^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{24}{81}$；

$P(Y=3)=C_4^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^1=\frac{8}{81}$；$P(Y=4)=C_4^4(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{81}$.

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

所以 X 的分布列为

X	0	300	600	900	1200
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

……………………………………10 分

由 $EY=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，得 X 的数学期望 $EX=300EY=400$ 元. …………12 分

20. 解：（I）设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，

$\because \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$， 又$\because 4\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{5}$，$\therefore a^2+b^2=5$

由 $b^2=a^2-c^2=\frac{1}{4}a^2$，解得 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

（II）若直线 l 的斜率不存在，则直线 l_0 为任意直线都满足要求；…………5 分

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为：$y=k(x-1)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$（不妨令 $x_1>1>x_2$），则 $d_A=x_0-x_1,d_B=x_0-x_2$，$|PA|=\sqrt{1+k^2}(x_1-1)$，$|PB|=\sqrt{1+k^2}(1-x_2)$，

$\because \frac{d_A}{d_B}=\frac{|PA|}{|PB|}$，$\therefore \frac{x_0-x_1}{x_0-x_2}=\frac{\sqrt{1+k^2}(x_1-1)}{\sqrt{1+k^2}(1-x_2)}=\frac{x_1-1}{1-x_2}$，解得 $x_0=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)-2}$

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$ ，

$$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2},x_0=\frac{\dfrac{8k^2-8}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2}{1+4k^2}}{\dfrac{8k^2}{1+4k^2}-2}=4.$$

综上可知存在直线 $l_0:x=4$ ，使得 A,B 到直线 l_0 的距离 d_A,d_B 满足 $\dfrac{d_A}{d_B}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立. ……………12 分

21．解：(I) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ，$f'(x)=1+a\ln x+a$ ……………1 分

当 $a=0$ 时，$f(x)=x$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增；……………2 分

当 $a>0$ ，由 $f'(x)>0$ 得 $x>e^{-\frac{a+1}{a}}$ ，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<e^{-\frac{a+1}{a}}$ 。

所以，$f(x)$ 在区间 $(0,e^{-\frac{a+1}{a}})$ 上单调递减，在区间 $(e^{-\frac{a+1}{a}},+\infty)$ 上单调递增；………3 分

当 $a<0$ ，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<e^{-\frac{a+1}{a}}$ ，由 $f'(x)<0$ 得 $x>e^{-\frac{a+1}{a}}$ ，所以，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,e^{-\frac{a+1}{a}})$ 上单调递增，在区间 $(e^{-\frac{a+1}{a}},+\infty)$ 上单调递减。

综上所述，当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a>0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,e^{-\frac{a+1}{a}})$ 上单调递减，在区间 $(e^{-\frac{a+1}{a}},+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,e^{-\frac{a+1}{a}})$ 上单调递增，在区间 $(e^{-\frac{a+1}{a}},+\infty)$ 上单调递减。

……………5 分

(II) 由（I）知 $a<0$ 且 $e^{-\frac{a+1}{a}}=1$，解得 $a=-1$ ……………………………………6 分

$f(x)=x-x\ln x$ ，要证 $f\left(x\right)\le e^{-x}+x^2$ ，即证 $x-x\ln x\le e^{-x}+x^2$ ，即证：$1-\ln x\le \dfrac{e^{-x}}{x}+x$ ………7 分

令 $F(x)=\ln x+\dfrac{e^{-x}}{x}+x-1\ (x>0)$ ，则 $F'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-e^{-x}x-e^{-x}}{x^2}+1=\dfrac{(x+1)(x-e^{-x})}{x^2}$.

令 $g(x)=x-e^{-x}\ (x>0)$ ，易见函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增．而 $g(1)=1-\dfrac{1}{e}>0$ ，$g(0)=-1<0$ ，所以在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的实数 x_0 ，使得 $g(x_0)=x_0-e^{-x_0}=0$ ，即

$x_0 = e^{-x_0}$，且 $x \in (0, x_0)$ 时 $g(x) < 0$， $x \in (x_0, +\infty)$ 时 $g(x) > 0$. 故 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上递增.

$\therefore F(x)_{\min} = F(x_0) = \ln x_0 + \dfrac{e^{-x_0}}{x_0} + x_0 - 1$ ························10 分

又 $e^{-x_0} = x_0$， $\therefore F(x)_{\min} = \ln x_0 + \dfrac{e^{-x_0}}{x_0} + x_0 - 1 = -x_0 + 1 + x_0 - 1 = 0$.

$\therefore F(x) \ge F(x_0) = 0$ 成立，即 $f(x) \le e^{-x} + x^2$ 成立. ············12 分

23. 解（I）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t, \\ y = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases}$ t 为参数，曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2 = -4x$. ·····································5 分

（II）将 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 代入 $y^2 = -4x$ ，得 $\dfrac{3}{4}t^2 + (2 + \sqrt{3})t + 1 = 0$. 其判别式 $\Delta = 4 + 4\sqrt{3} > 0$ ，故有 $t_1 + t_2 = -\dfrac{4\left(2 + \sqrt{3}\right)}{3}, t_1 \cdot t_2 = \dfrac{4}{3}$ ，

$\therefore \dfrac{1}{|PA|} + \dfrac{1}{|PB|} = -\dfrac{t_1 + t_2}{t_1 \cdot t_2} = 2 + \sqrt{3}$.

·····························10 分

24. 解：(I) 当 $x \ge 0$ 时，$f(x) = x^2 - x + 3 \ge 3x$ ，即 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$ ，解得 $x \ge 3$ 或 $x \le 1$。所以 $x \ge 3$ 或 $0 \le x \le 1$；

当 $x < 0$ 时， $f(x) = x^2 + x + 3 \ge 3x$ ，此不等式 $x^2 - 2x + 3 \ge 0$ 恒成立.所以 $x < 0$ 。

综上所述，原不等式的解集为 $\left\{ x \middle| x \ge 3 \text{ 或 } x \le 1 \right\}$. ·····························5 分

（II） $f(x) - x^2 \le \left| \dfrac{x}{2} + a \right|$ 恒成立，即 $-|x| + 3 \le \left| \dfrac{x}{2} + a \right|$ 恒成立，即 $\left| \dfrac{x}{2} + a \right| + |x| \ge 3$ 恒成立，$\because \left| \dfrac{x}{2} + a \right| + |x| = \left| \dfrac{x}{2} + a \right| + \left| \dfrac{x}{2} \right| + \left| \dfrac{x}{2} \right| \ge \left| \dfrac{x}{2} + a - \dfrac{x}{2} \right| + \left| \dfrac{x}{2} \right| = |a| + \left| \dfrac{x}{2} \right| \ge |a|$，当且仅当 $x = 0$ 时等式成立，$\therefore |a| \ge 3$，解得 $a \ge 3$ 或 $a \le -3$.

故实数a的取值范围是$\left(-\infty,-3\right]\cup\left[3,+\infty\right)$.　　　　…………………………10 分