淮北市•宿州市2019届高三一模数学参考答案理科

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	A	B	B	C	C	D	D	B	C

第 11 题简析：设内切圆半径为 r，由题意得 $\frac{1}{2}\times 4a\cdot r=\frac{1}{2}\times 2c\cdot\left|y_1-y_2\right|$

得 $\left|y_1-y_2\right|=\frac{2}{e}\in\left[\frac{8}{3},4\right]$，$\left|AB\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|y_1-y_2\right|\in\left[\frac{8\sqrt{5}}{3},4\sqrt{5}\right]$，故选 B.

第 12 题简析：由 $f(x)\le g(x)+1$ 即 $e^{2x-k}+4e^{k-2x}\le\ln(2x+4)-2x+1\quad(*)$

而 $e^{2x-k}+4e^{k-2x}\ge 2\sqrt{e^{2x-k}\cdot 4e^{k-2x}}=4$，当且仅当 $e^{2x-k}=2$，即 $x=\frac{\ln 2+k}{2}$

记 $h(x)=\ln(2x+4)-2x+1$

则 $h'(x)=\frac{1}{x+2}-2$，当 $x\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ 时 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增

当 $x\in\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$ 时 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减

得 $h(x)_{\max}=h(-\frac{3}{2})=4$　　若 $(*)$ 成立，则仅当 $x=\frac{\ln 2+k}{2}=-\frac{3}{2}$，得 $k=-3-\ln 2$.

二、填空题

13. $3\sqrt{2}$　　14. 1　　15. $y=-\frac{\sqrt{5}}{7}(x-3)$　　16. ①②③

第 15 题简析：设 $\angle MOQ=2\theta$，由 $S_{\Delta MOQ}=S_{\Delta POQ}+S_{\Delta POM}$ 得 $\frac{3}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$，得 $\cos\theta=\frac{2}{3}$

进而的直线斜率 $k=-\frac{\sqrt{5}}{7}$，故直线方程为 $y=-\frac{\sqrt{5}}{7}(x-3)$.

第 16 题简析：依题意可构造正方体解得。

三、解答题

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）在 $a_n^2+2a_n=4S_n-1$ 中，

当 $n=1$ 时，$(a_1-1)^2=0$，解得 $a_1=1$。

$a_n^2+2a_n=4S_n-1$ ①

当 $n \geq 2$ 时，$a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} = 4S_{n-1} - 1$ ②

由①②得 $a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1} = 4a_n$，整理得 $\left(a_n + a_{n-1}\right)\left(a_n - a_{n-1} - 2\right) = 0$，因为 $a_n > 0$，所以 $a_n - a_{n-1} = 2$，所以数列 $\left\{a_n\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，故 $a_n = 2n - 1$。

（2）$b_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$，所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n =$

$\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \cdots \left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{n}{2n+1}$。

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $\vec{m} // \vec{n}$，所以有 $b(a-b) - (a-c)(a+c) = 0$，整理得 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$，由余弦定理得 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{1}{2}$。又因为 $C \in (0, \pi)$，所以 $C = \dfrac{\pi}{3}$。

（2）由 $\sin C + \sin(A - B) = 2\sin 2B$，得 $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 4\sin B \cos B$，整理得 $2\cos B(\sin A - 2\sin B) = 0$。

当 $\cos B = 0$ 时，$B \in (0, \pi)$，所以 $B = \dfrac{\pi}{2}$，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\tan C = \dfrac{c}{a} = \sqrt{3}$，解得 $a = 1$，此时 ΔABC 的面积为 $S = \dfrac{1}{2}ac = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $\sin A - 2\sin B = 0$ 时，由正弦定理得 $a = 2b$，将其代入 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$，得 $c^2 = 3b^2$，解得 $b = 1$。此时 $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

综上所述，ΔABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

19.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由直方图可知, 抽出产品为合格品的频率为 $\left(0.75 + 0.65 + 0.2\right) \times 0.5 = 0.8$,

即抽出产品为合格品的概率为 $\dfrac{4}{5}$, ……………………………1 分

从产品中随机抽取 4 件, 合格品的个数 ξ 的所有可能取值为 $0,1,2,3,4$, 且

$P(\xi = 0) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^4 = \dfrac{1}{625}$，$P(\xi = 1) = C_4^1 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{16}{625}$，$P(\xi = 2) = C_4^2 \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{96}{625}$，

$P(\xi=3)=C_4^3\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\frac{1}{5}=\frac{256}{625}$，$P(\xi=4)=\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$，…………………………………………3 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$

ξ 的数学期望 $E\xi=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$.　　　　　　　　…………………………5 分

（Ⅱ）随机抽取 n 件，全是合格品的概率为 $\left(\frac{4}{5}\right)^n$，依题意 $\left(\frac{4}{5}\right)^n\ge 0.3$，故 n 的最大值为 5. …………8 分

（Ⅲ）按 A 方案随机抽取产品不合格的概率是 a，随机抽取 15 件产品，不合格个数 $X\sim B(15,a)$；

按 B 方案随机抽取产品不合格的概率是 b，随机抽取 25 件产品，不合格个数 $Y\sim B(25,b)$，

依题意 $EX=15a=2$，$EY=25b=4$，解得 $a=\frac{2}{15}$，$b=\frac{4}{25}$，………………………………………………11 分

因为 $\frac{2}{15}<\frac{4}{25}$，所以应选择方案 A. ………………………………………………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

（I）证明：在梯形 $ABCD$ 中，

因为 $AB//CD$，$AD=DC=1$，

$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$ 所以 $AC=\sqrt{2}$ 又因为 $AB=2$ ，取 AB 中点 P，则 PC＝1，PB＝1，易知 $BC=\sqrt{2}$

所以 $AB^2=AC^2+BC^2$ 所以 $BC\perp AC$　　　　　　　……………………… 2 分

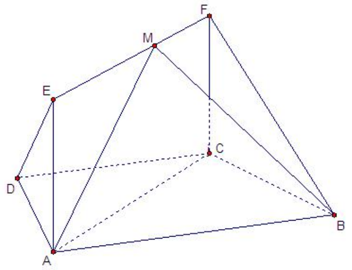
因为平面 $ACFE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ACFE\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$

所以 $AC\perp$ 平面 $ACFE$ 又 $BC\subseteq$ 平面 BCF

所以 平面 $BCF\perp$ 平面 $ACFE$；　　　……………………………………………5 分

（II）解法一：由（I）可建立分别以直线 CA,CB,CF 为 x 轴，y 轴, z 轴的如图所示空间直角坐标系，令 $FM=\lambda(0\le\lambda\le\sqrt{2})$，则 $C(0,0,0),A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0),M(\lambda,0,\sqrt{2})$

所以 $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0),\overrightarrow{AM}=(\lambda-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$　……………7 分



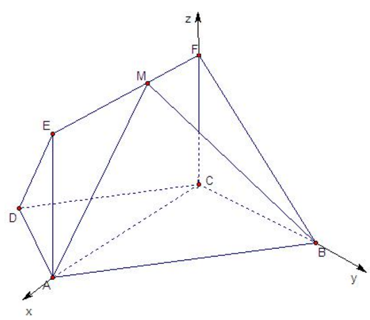
设 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$ 为平面 MAB 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(\lambda-\sqrt{2})x+\sqrt{2}z=0\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$

取 $x=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}-\lambda)$，　　……………9 分

因为 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$ 是平面 ACFE 的一个法向量

所以



$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+2+\left(\sqrt{2}-\lambda\right)^2}\times 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\lambda-\sqrt{2}\right)^2+4}}=\dfrac{2}{3}$ ················11 分

可得 $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $FM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ·························12 分

21.（本小题满分 12 分）

解（Ⅰ）由题意得

$\begin{cases}2c=2\sqrt{2}\\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，　得 $a^2=4,b^2=2,$

故椭圆的方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ···········5 分

（2）设直线 AB 为 $y=kx+m, A(x_1,y_1),B(x_2,y_2), C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$

由 $\begin{cases}y=kx+m\\ x^2=4y\end{cases}$,得$x^2-4kx-4m=0$

则 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4m,$ ········ˆ8 分

由 $x^2=4y$,得$y'=\dfrac{x}{2}$,$\therefore k_{PA}=\dfrac{x_1}{2},k_{PB}=\dfrac{x_1}{2}$······

$\dfrac{x_1}{2}\cdot\dfrac{x_1}{2}=-1\therefore m=1$，所以直线 AB 为 $y=kx+1,$···········7 分

$\begin{cases}y=kx+1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$得（$1+2k^2$）$x^2+4kx-2=0$

$x_3+x_4=\dfrac{-4k}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{-2}{1+2k^2},$

$|CD|=\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|=\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{\sqrt{8(1+4k^2)}}{1+2k^2},$

原点到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}},$

ΔOCD 的面积 $S=\dfrac{1}{2}d|CD|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{\sqrt{8(1+4k^2)}}{1+2k^2}=\dfrac{\sqrt{2(1+4k^2)}}{1+2k^2},$ ······9 分

设 $t=1+2k^2(t\ge 1)$,则$k^2=\dfrac{t-1}{2}$ 代如上式得

$$S=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2t-1}}{t}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2t-1}{t^2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-(\frac{1}{t}-1)^2+1}\le\sqrt{2},$$

所以ΔOCD的面积的最大值是$\sqrt{2}$……12 分

22.(本小题满分 12 分)

解：（1）$f'(x)=1+\ln x, f'(1)=1, g'(x)=-kx+1-k$

由题意得，$g'(1)=-1$，即$g'(1)=-k+1-k=-1$，$\therefore k=1$

(2)由（1）可知，$F(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+1, x>0$，

$F'(x)=\ln x-x+1$, $F''(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

易知,当$x\in(0,1)$时$F''(x)>0, F'(x)$单调递增，

当$x\in(1,+\infty)$时，$F''(x)<0, F'(x)$单调递减，

所以$F'(x)\le F'(1)=0$

即$F'(x)\le 0$恒成立，所以$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(3)由$m+n=2$得，$n=2-m,$，且$m,n\in(0,2)$

令$H(x)=F(x)+F(2-x)-1, x\in(0,2)$，

$$H(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+1+(2-x)\ln(2-x)-\frac{1}{2}(2-x)^2+1-1$$

$$=x\ln x+(2-x)\ln(2-x)-x^2+2x-1,\quad x\in\left(0,2\right)$$

$H'(x)=\ln x-\ln(2-x)-2x+2$，

令$\varphi(x)=H'(x)=\ln x-\ln(2-x)-2x+2$，$\varphi'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}-2=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}\ge 0$

$\therefore\varphi(x)$在区间$\left(0,2\right)$上单调递增，即$H'(x)$在区间$\left(0,2\right)$单调递增，

又$H'(1)=0$，$\therefore H(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$\left(1,2\right)$上单调递增，

$\therefore H(x)_{\min}=H(1)=0$,即$F(x)+F(2-x)-1\ge 0$，

令$x=m$即$F(m)+F(n)\ge 1$.